

INTERVALOS DE CONFIANÇA BOOTSTRAP E SUBAMOSTRAGEM

João Renato Sebastião e Sara Morgado Nunes*

RESUMO

Neste trabalho consideram-se as metodologias de reamostragem e subamostragem. Estas metodologias, computacionalmente intensivas, são hoje amplamente utilizadas na Inferência Estatística no cálculo de intervalos de confiança para um determinado parâmetro de interesse. Num estudo de simulação aplica-se o bootstrap e a subamostragem a conjuntos de observações provenientes de populações normais com o objectivo de determinar intervalos de confiança para o valor médio.

1. INTRODUÇÃO

A questão da estimação de um parâmetro desconhecido θ constitui um problema que surge habitualmente em Estatística. Neste contexto, ocorrem duas questões importantes:

- Que estimador $\hat{\theta}$ deve ser usado?
- Tendo-se optado por um estimador particular $\hat{\theta}$, como avaliar a precisão de enquanto estimador de θ ?

Para dar resposta a esta segunda questão, suponhamos que se pretende construir um intervalo de confiança de caudas iguais com nível de significância 2α para θ . Notando os quantis de $\hat{\theta} - \theta$ por a_α , temos $P(\hat{\theta} - \theta \leq a_\alpha) = P(\hat{\theta} \leq \theta + a_\alpha)$. Daqui resulta que o intervalo $[\hat{\theta}_Y - a(1-\alpha); \hat{\theta}_Y - a(\alpha)]$ tem probabilidade de cobertura $1-2\alpha$. Note-se porém que esta solução raramente se aplica uma vez que a distribuição de $\hat{\theta} - \theta$ é, em geral, desconhecida. Nesse caso, pode aproximar-se $\hat{\theta} - \theta$ através de uma distribuição $N(0, I)$, sendo para tal necessário que a amostra em causa seja suficientemente grande (em geral, $n > 30$). Assim, notando por $z(\alpha)$ o quantil de probabilidade $1-\alpha$ da distribuição $N(0, I)$ e por v_y a variância estimada com base na amostra Y , resulta um **intervalo de confiança “clássico”** com probabilidade de cobertura $1-2\alpha$:

$$\left[\hat{\theta}_Y - z \sqrt{\frac{v_y}{n}}; \hat{\theta}_Y + z \sqrt{\frac{v_y}{n}} \right] \quad (1)$$

Se além de não se conhecer a distribuição de $\hat{\theta} - \theta$, a amostra em causa for de pe-

* Escola Superior de Gestão Instituto Politécnico de Castelo Branco

quena dimensão ou a expressão para a variância for difícil de obter, os métodos analíticos mostram-se ineficazes na resolução do problema apresentado.

Foi inicialmente numa tentativa de estimar o erro padrão de determinada estatística que surgiram os métodos de reamostragem como o **bootstrap** [Efron (1979)] ou de **subamostragem** como o jackknife [Tukey (1958)] cujo princípio básico é a utilização repetida da amostra original de modo a obter várias estimativas de θ , que serão usadas para estimar ou aproximar a distribuição de \hat{Q} e as suas características. É também de referir que, desde a década de 90, se tem vindo a assistir a um desenvolvimento extraordinário das metodologias estatísticas de base computacional. Foi neste contexto que, Politis e Romano (1994) propuseram uma metodologia mais geral: a **subamostragem**, a qual constitui um método robusto que se aplica sob condições mais gerais que as técnicas de reamostragem. Actualmente, estas técnicas constituem uma ferramenta útil na Inferência Estatística permitindo a determinação de intervalos de confiança para parâmetros populacionais sem recorrer a cálculos matemáticos complexos, sendo portanto amplamente utilizadas não apenas por estatísticos mas em muitas outras áreas como na Econometria, Ciências Sociais, Ciências Médicas, entre outras.

A primeira parte deste trabalho consiste numa revisão muito breve acerca das metodologias de reamostragem e subamostragem, aplicadas à determinação de intervalos de confiança para parâmetros populacionais. Na segunda parte apresentam-se os resultados de um estudo de simulação levado a efeito no *software* estatístico *R-Project*, que consistiu na determinação de intervalos de confiança para o valor médio de conjuntos de dados provenientes de populações normais através das metodologias estudadas.

2. REAMOSTRAGEM

O bootstrap faz parte da grande família dos métodos de reamostragem e foi originalmente proposto por Efron em 1979, tendo revolucionado a Estatística. Embora as ideias subjacentes ao bootstrap sejam antigas, o interesse da comunidade científica pelo método surgiu essencialmente após os trabalhos de Efron (1979) e Efron e Tibshirani (1986) onde o bootstrap é apresentado como um método de base computacional adequado a vários problemas de estimação. Desde então, o bootstrap tem vindo a ser aperfeiçoado, constituindo actualmente um método computacionalmente intensivo eficaz e amplamente usado na inferência estatística.

Efron e Tibshirani (1993) apresentam de forma muito clara o funcionamento deste método:

Suponha-se que se dispõe de uma amostra aleatória $Y = (X_1, \dots, X_n)$ pertencente a uma determinada distribuição de probabilidade desconhecida F e que se pretende estimar um parâmetro de interesse $Q - \theta(F)$ com base em Y , notado aqui por \hat{Q}_y . Através deste método é possível, por exemplo, construir de modo simples estimadores para a distribuição de \hat{Q} e as suas características com base na amostra Y , como refere Brito (2000).

Começa-se por construir a distribuição empírica, estimador de \hat{F} , definida como

$$\hat{F}(x) = \frac{\# \{X_i \leq x\}}{n}$$

. A função distribuição empírica obtém-se atribuindo peso $1/n$ a cada

um dos valores observados $X_i, i = 1, \dots, n$. Com \hat{F} fixo, defina-se uma amostra bootstrap

$Y' = (X'_1, \dots, X'_n)$ como sendo uma amostra aleatória de tamanho n obtida de $\hat{\theta}$, com reposição, a partir da população dos n indivíduos (X_1, \dots, X_n) : $\hat{F} \otimes F(X'_1, \dots, X'_n)$. A notação $*$ indica que Y^* não é o conjunto de dados original Y mas sim uma versão reamostrada de Y .

Selecionam-se então B amostras bootstrap independentes de dimensão n , Y^1, \dots, Y^B , obtidas com reposição a partir de Y (para estimar o erro padrão, geralmente $50 < B < 200$). Associada a cada conjunto de dados bootstrap Y^* está uma réplica bootstrap de $\hat{\theta}$ notada por $\hat{\theta}^*(b)$, $b=1, \dots, B$, a qual resulta da aplicação da mesma função a Y^* que foi aplicada a Y .

Finalmente, estima-se o erro padrão de $\hat{\theta} - se_F(\hat{\theta})$ - pelo desvio padrão das B réplicas:

$$se_B = \left[\frac{\sum_{b=1}^B [\hat{\theta}^*(b) - \hat{\theta}^*(\cdot)]^2}{B-1} \right]^{1/2} \quad \text{onde} \quad \hat{\theta}^*(\cdot) = \frac{\sum_{b=1}^B \hat{\theta}^*(b)}{B}$$

Verifica-se que o desvio padrão empírico aproxima o desvio padrão da população

$$\lim_{B \rightarrow \infty} se_B = se_F = se_F(\hat{\theta}')$$

quando o número de réplicas aumenta pois

Davison & Hinkley (1997) apresentam alguns intervalos de confiança que podem ser construídos com base na metodologia bootstrap:

Notando por b_B e v_B , respectivamente, as estimativas do viés e da variância com base nas B réplicas bootstrap, obtém-se um **intervalo bootstrap normal** para θ :

$$\hat{\theta}_F - z_{\alpha} \sqrt{v_B} \leq \theta \leq \hat{\theta}_F + z_{\alpha} \sqrt{v_B} \quad (2)$$

Porém, em situações nas quais a variância é difícil de calcular, é possível estimar os quantis α e $1-\alpha$ através dos quantis correspondentes de $\hat{\theta}^1 - \hat{\theta}_F$ obtendo-se um **intervalo bootstrap basic** para θ :

$$\left[2\hat{\theta}_F - \theta^*((B+1)(1-\alpha)); 2\hat{\theta}_F - \theta^*((B+1)\alpha) \right] \quad (3)$$

$$Z = \frac{\hat{\theta} - \theta}{\sqrt{V}}$$

Considere-se agora uma aproximação bootstrap a $\hat{\theta}$, onde V é o estimador da variância. Cada amostra simulada é usada para calcular $\hat{\theta}^*$, a variância estimada v^*

$$z^* = \frac{\hat{\theta}^* - \hat{\theta}_F}{\sqrt{v^*}}$$

e a versão bootstrap de Z . Os B valores simulados de z^* são ordenados e o quantil p de Z é estimado pelo $(B+1)$ -ésimo quantil. Assim, um **intervalo bootstrap studentized** é dado por

$$\hat{\theta}_F - z'((B+1)(1-\alpha)); \hat{\theta}_F + z'((B+1)\alpha) \quad (4)$$

Os limites deste intervalo de confiança são também conhecidos por limites bootstrap-t, por analogia com os limites de confiança Student-t para a média de uma distribuição normal.

3. SUBAMOSTRAGEM

A ideia subjacente ao método de subamostragem introduzido por Politis e Romano (1994) é aproximar a distribuição amostral de uma estatística com base no cálculo da mesma em subconjuntos do conjunto de dados original. Assim, são geradas subamostras de tamanho $b < n$ amostrando, sem reposição, b observações a partir da sequência de dados original de tamanho n sendo, depois, a estatística de interesse calculada no conjunto inteiro

de dados e em todos os $\binom{n}{b}$ subconjuntos de dados de tamanho b . Os valores resultantes do cálculo da estatística em cada subamostra são convenientemente normalizados de forma a aproximarem a verdadeira distribuição amostral em causa. A subamostragem constitui assim um método muito geral para a construção de intervalos de confiança de 1ª ordem assimp-

toticamente válidos pois, sob certas hipóteses em b (de forma a que $b \rightarrow \infty$ e $b/n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$), o método é válido sempre que a estatística original, convenientemente normalizada, apresenta uma distribuição limite sob o verdadeiro modelo. Outros métodos como o bootstrap, impõem que a distribuição da estatística seja de alguma forma estável enquanto tal condição não é necessária no método de subamostragem, funcionando este sob condições muito fracas.

Na verdade, o uso da subamostragem para aproximar a variância de uma estatística não constitui uma ideia nova. Os estimadores jackknife do viés e da variância baseados no cálculo da estatística em todas as subamostras de tamanho $n-1$ foram estudados por Quenouille-Tukey e aproximam-se da média e variância da distribuição amostral estimada estudada por Politis e Romano (1992) com $b=n-1$. Também Hartigan (1969) havia introduzido o que Efron (1982) apelidou de método de subamostragem aleatória, o qual se baseava no cálculo da estatística de interesse em todos os $2^n - 1$ subconjuntos de dados, produzindo assim limites de confiança exactos. Mais tarde, Hartigan (1975) adaptou estes resultados a um contexto mais geral de estimadores com distribuição assimpótica normal. O jackknife e a subamostragem aleatória são métodos similares no sentido em que ambos usam subconjuntos de dados para aproximarem o erro padrão de uma estatística ou a sua distribuição amostral.

Apesar de partilhar algumas propriedades com os métodos atrás referidos, o bootstrap de Efron (1979) veio corrigir algumas deficiências no jackknife, permitindo concretizar um objectivo mais ambicioso: aproximar uma distribuição amostral completa. Shao e Wu (1989) mostraram que, baseando o estimador jackknife da variância na estatística calculada em subamostras com d observações apagadas, muitas deficiências do estimador da variância jackknife usual (com $d=1$) podem ser ultrapassadas. Mais tarde, Wu (1990) usou estes resultados para aproximar uma distribuição amostral através do que chamou um histograma jackknife, mas apenas em dados independentes e identicamente distribuídos, onde a normalidade assimpótica está assegurada. Posteriormente, Politis e Romano (1992) mostraram como os valores resultantes da subamostragem podem servir para estimar com exactidão uma distribuição amostral sem qualquer pressuposto de normalidade assimpótica, assumindo apenas a existência de uma distribuição limite e, desde então, esta técnica tem vindo a ser aperfeiçoada [Politis et al (1997, 1999)].

Veja-se, de forma muito sucinta, como funciona a metodologia da subamostragem:

Sejam (X_1, \dots, X_n) n observações independentes e identicamente distribuídas de uma variável aleatória que toma valores num espaço amostral S e seja P uma medida de probabilidade. Suponha-se que se optou por uma estatística $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ para estimar um determinado parâmetro $\theta = \theta(P)$. O objectivo é construir um intervalo de confiança

para um determinado parâmetro $\theta(P) \in \mathbb{R}^k$, com base nas observações X_1, \dots, X_n . Assim, seja $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n)$ um estimador do parâmetro de interesse $\theta(P)$. Pretende-se estimar a verdadeira distribuição amostral de $\hat{\theta}_n$ de modo a fazer inferências sobre \mathbb{R}^k . Nada é assumido acerca da forma do estimador.

Seja $J_n(P)$ a distribuição amostral de $\tau_n(\hat{\theta}_n - \theta(P))$, onde τ_n é uma constante de normalização apropriada. Defina-se também a correspondente função distribuição acumulada como $J_n(x, P) = \text{Prob}_{\theta}(\hat{\theta}_n \in \mathbb{R}^k | X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^k \in \mathbb{R}^k$.

Essencialmente, a única hipótese que é necessário colocar para estimar de forma consistente é a seguinte:

Hipótese A:

Existe uma lei limite $J(P)$ tal que $J_n(P)$ converge fracamente para $J(P)$ quando $n \rightarrow \infty$.

Isto significa que τ_n é tal que $J(P)$ possui uma distribuição limite não degenerada.

Note-se por Y_1, \dots, Y_{N_n} os $N_n = \binom{n}{b}$ subconjuntos de tamanho b de X_1, \dots, X_n e por $\hat{\theta}_{n,i}$ o valor da estatística $\hat{\theta}_b$ calculada no conjunto de dados Y_i .

As únicas condições a impor a b é que $b/n \rightarrow 0$ e $b \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$.

A aproximação subamostragem a $J_n(x, P)$ é então definida por:

$$L_{n,b}(x) = \frac{1}{N_n} \sum_{i=1}^{N_n} I(\tau_b(\hat{\theta}_{n,i} - \hat{\theta}_n) \leq x)$$

onde I_E é a função indicatriz do evento $E = \{\hat{\theta}_b \in \mathbb{R}^k | \hat{\theta}_n \in \mathbb{R}^k\}$.

Para cada i , Y_i é uma subamostra de tamanho b do verdadeiro modelo P . Logo, a distribuição exacta de $\tau_b(\hat{\theta}_{n,i} - \theta(P))$ é $J_b(P)$. A distribuição empírica dos N_n valores de $\tau_b(\hat{\theta}_{n,i} - \theta(P))$ constitui uma boa aproximação a $J_n(P)$. Assim, sendo $\theta(P)$ desconhecido, é possível substituir $\theta(P)$ por $\hat{\theta}_n$ uma vez que $\tau_b(\hat{\theta}_n - \theta(P))$ é de ordem τ_b/τ_n

em probabilidade e assume-se que $\tau_b/\tau_n \rightarrow 0$.

O facto de $N_n = \binom{n}{b}$ constituir, na maior parte dos casos, um valor muito elevado, dificulta o cálculo da aproximação subamostragem $L_{n,b}(x)$. Nesse caso, pode ser usado um número menor de subamostras seleccionadas aleatoriamente sem reposição.

Politis e Romano (1994) demonstram um resultado que estabelece as condições sob as quais o método de subamostragem conduz a resultados assintoticamente válidos para estatísticas gerais, funcionando sob condições mínimas. Nenhum teorema equivalente é considerado nos métodos de reamostragem como o bootstrap em blocos móveis. Pelo contrário, tais métodos exigem uma análise de cada caso muito mais complexa.

Teorema A [Politis e Romano (1994)]:

Assuma-se a Hipótese A e que $\frac{\delta_n}{\delta_n} \otimes 0$, $\frac{b}{n} \otimes 0$ e $b \otimes \square$ quando $n \otimes \square$.

i. Se x é um ponto de continuidade de $J(\cdot, P)$, então $L_{n,b}(x) \rightarrow J(x, P)$ em probabilidade.

ii. Se $J(\cdot, P)$ é contínua, então $\sup_x |L_{n,b}(x) - J(x, P)| \rightarrow 0$ em probabilidade.

iii. Para $\alpha \in]0, 1[$, seja $c_{\alpha, b} \in]0, \infty[= \inf_{x \in \mathbb{R}} \frac{J(x, P) - \alpha}{b}$.

Correspondentemente, defina-se $c(1-\alpha, P) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \frac{J(x, P) - (1-\alpha)}{b}$.

Se $J(\cdot, P)$ é contínua em $c(1-\alpha, P)$, então $\text{Prob}_P \left\{ \tau_n \left[\hat{\theta}_n - \theta(P) \right] \leq c_{n,b}(1-\alpha) \right\} \rightarrow 1-\alpha$ quando $n \rightarrow \infty$.

Então, a probabilidade de cobertura assintótica sob P do intervalo $I_\alpha = \left[\hat{\theta}_n - \tau_n^{-1} c_{n,b}(1-\alpha), \infty \right[$ é $1-\alpha$.

Note-se que, além da condição de mistura, a principal dificuldade em aplicar o teorema é verificar quando é que o estimador, devidamente normalizado, possui uma distribuição limite não degenerada, cuja forma, contudo, não precisa ser conhecida. Muito mais trabalho é geralmente necessário para demonstrar a validade dos métodos bootstrap. Por outro lado, o facto de não ser necessário que se conheça $J(x, P)$ para que a subamostragem funcione, faz desta uma metodologia muito geral.

Um **intervalo de confiança bilateral de caudas iguais** pode ser obtido através da intersecção de dois intervalos unilaterais. Assim, o intervalo bilateral análogo a I_α é

$$I_{ET} = \left[\hat{\theta}_n - \tau_n^{-1} c_{n,b} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right), \hat{\theta}_n - \tau_n^{-1} c_{n,b} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right] \quad (5).$$

I_{ET} diz-se um intervalo de caudas iguais por ter probabilidade aproximadamente igual em cada cauda:

$$\text{Prob}_P \left[\hat{\theta}_n - \tau_n^{-1} c_{n,b} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \leq \hat{\theta}_n - \tau_n^{-1} c_{n,b} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right] \approx \text{Prob}_P \left[\hat{\theta}_n - \tau_n^{-1} c_{n,b} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \leq \hat{\theta}_n - \tau_n^{-1} c_{n,b} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right]$$

Como aproximação alternativa, também podem ser construídos intervalos de confiança simétricos bilaterais. Para isso estima-se a função distribuição bilateral

$$J_{n,b}(x, P) = \text{Prob}_P \left[\hat{\theta}_n - \tau_n^{-1} c_{n,b} \leq x \right]$$

A aproximação por subamostragem a $J_{n,b}$ é então definida por

$$L_{n,b}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-b+1} I \left[\hat{\theta}_n - \tau_n^{-1} c_{n,b} \leq \hat{\theta}_n^{(i)} \right]$$

Denotando um quantil $(1-\alpha)$ de $L_{n,b}$ por $c_{\alpha, b}$, o **intervalo subamostragem simétrico** é então dado por

$$I_{s, \alpha} = \left[\hat{\theta}_n - \tau_n^{-1} c_{\alpha, b}, \hat{\theta}_n + \tau_n^{-1} c_{\alpha, b} \right] \quad (6).$$

Intervalos de confiança simétricos não constituem necessariamente uma escolha superior pois a assimetria de um intervalo de caudas iguais pode conter informação útil acerca da

localização do verdadeiro parâmetro e da assimetria da distribuição amostral do estimador.

4. ESTUDO DE SIMULAÇÃO

Nesta secção apresentam-se os resultados de dois estudos de simulação levados a efeito no *software* estatístico *R-Project*. O referido *software* contém o *package* “boot”, ao qual se recorreu para a aplicação da metodologia bootstrap. Por sua vez, para a aplicação da metodologia de subamostragem, foi necessário proceder à sua implementação total uma vez que não existe, até ao momento, qualquer módulo específico para o efeito.

No primeiro estudo aplicou-se o bootstrap e a subamostragem a amostras provenientes de populações normais com o objectivo de construir intervalos de confiança para o valor médio, comparando-se as probabilidades de cobertura estimadas dos intervalos de confiança obtidos através das referidas metodologias. Por sua vez, o objectivo do segundo estudo é caracterizar a distribuição dos estimadores do valor médio resultantes da aplicação do bootstrap e da subamostragem. Em ambos os estudos, a estatística utilizada na estimação do valor médio foi a média aritmética.

4.1 INTERVALOS DE CONFIANÇA PARA O VALOR MÉDIO

O objectivo deste estudo é analisar o comportamento das metodologias bootstrap e subamostragem em pequenas amostras. Começou-se por gerar amostras de 10, 20 e 30 observações de uma distribuição $N(0, 1)$. Relativamente a cada uma das três amostras geradas, procedeu-se da seguinte forma:

- calculou-se um intervalo de confiança “clássico” (1) a 95%;
- aplicou-se a metodologia bootstrap gerando-se 999 réplicas bootstrap e calcularam-se intervalos de confiança a 95% normal (2), basic (3) e studentized (4);
- aplicou-se a metodologia de subamostragem usando diferentes tamanhos de bloco ($b=4$, $b=8$ e $b=16$) e calculou-se, para cada situação, um intervalo de confiança a 95% de caudas iguais (5) e um intervalo de confiança a 95% simétrico (6).

Este procedimento foi repetido 1000 vezes registando-se o número de intervalos de confiança que, em cada simulação, continham o verdadeiro parâmetro, com o objectivo de se estimar a probabilidade de cobertura para cada caso.

	Metodologia									
	Bootstrap			Subamostragem						“Clássico”
	Norm	Basic	Stud	$b=4$		$b=8$		$b=16$		
				ET	sym	ET	sym	ET	sym	
$n=10$	0,899	0,902	0,946	0,823	0,772	0,543	0,517	-	-	
$n=20$	0,923	0,913	0,945	0,881	0,827	0,83	0,778	0,598	0,537	0,926
$n=30$	0,937	0,937	0,949	0,921	0,938	0,938	0,894	0,939	0,898	0,942

Tabela 1: Probabilidade de cobertura estimada para intervalos de confiança a 95% **bootstrap** (normal (**norm**), **basic** e studentized (**stud**)), subamostragem (de caudas iguais (**ET**) e simétricos (**sym**) usando diversos tamanhos de bloco b) e “clássicos”

Na Tabela 1 apresentam-se as probabilidades de cobertura estimadas para os diferentes

intervalos de confiança calculados. Da análise da Tabela 1 retiram-se as seguintes conclusões:

- Dos intervalos de confiança obtidos através do bootstrap é o studentized aquele que apresenta melhor cobertura.
- De um modo geral, na metodologia subamostragem, intervalos de caudas iguais (ET) apresentam probabilidades de cobertura superiores aos simétricos (sym). Para $n=10$, são os blocos de dimensão 4 que conduzem a melhores resultados, enquanto para $n=30$ é $b=16$, o que evidencia que o tamanho de bloco óptimo aumenta com a dimensão da amostra.
- Tanto nos intervalos bootstrap, subamostragem ou “clássicos” se registam probabilidades de cobertura mais próximas da probabilidade nominal para $n=30$ do que para $n=10$, isto é, a probabilidade de cobertura aproxima-se dos 95% à medida que n aumenta.

Na Fig. 1, apresentam-se os limites dos 1000 intervalos de confiança bootstrap studentized para $n=30$ e na Fig. 2 apresentam-se os limites dos 1000 intervalos de confiança subamostragem de caudas iguais para $n=30$ e $b=8$. Para as restantes situações foram construídos gráficos análogos (aqui não apresentados), destacando-se apenas o facto de, tanto os intervalos bootstrap, subamostragem como “clássicos” apresentarem amplitudes menores à medida que n aumenta.

4.2 DISTRIBUIÇÃO DOS ESTIMADORES

Com o objectivo de caracterizar a distribuição dos estimadores do valor médio resultantes do bootstrap e subamostragem, foram geradas amostras de dimensão $n=10$, $n=20$ e $n=30$, às quais foram aplicadas as referidas metodologias.

A partir dos valores resultantes do cálculo do valor médio nos 999 conjuntos de dados reamostrados, no caso do bootstrap, e em cada uma das 1000 subamostras, no caso da subamostragem, construiu-se o respectivo histograma ao qual foi ajustada a curva normal. A subamostragem foi aplicada usando-se blocos de tamanho $b=4$, $b=8$ e $b=16$.

Nas Figs. 3 e 4 apresentam-se os histogramas das estimativas do valor médio resultantes do bootstrap para $n=10$ e da subamostragem para $n=30$ e $b=4$. Para as restantes situações foram construídos gráficos análogos (aqui não apresentados), sendo no entanto de referir que as distribuições de probabilidade empírica dos estimadores bootstrap e subamostragem não se afastam significativamente da distribuição normal, embora se verifique que, à medida que n aumenta, o viés dos estimadores tende a diminuir.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho procedeu-se a uma revisão das metodologias de reamostragem e subamostragem, constatando-se que esta última se aplica sob condições mais gerais que a primeira. Estas técnicas constituem meios de resposta eficazes na avaliação da precisão de uma determinada estatística enquanto estimador de .

As metodologias bootstrap e subamostragem foram aplicadas a conjuntos de dados independentes e identicamente distribuídos com o objectivo de calcular intervalos de confiança para o valor médio e de caracterizar a distribuição assintótica dos estimadores resultantes da aplicação das referidas metodologias. Concluiu-se que, de um modo geral, nos conjuntos de dados estudados, o bootstrap conduziu a intervalos de confiança com probabi-

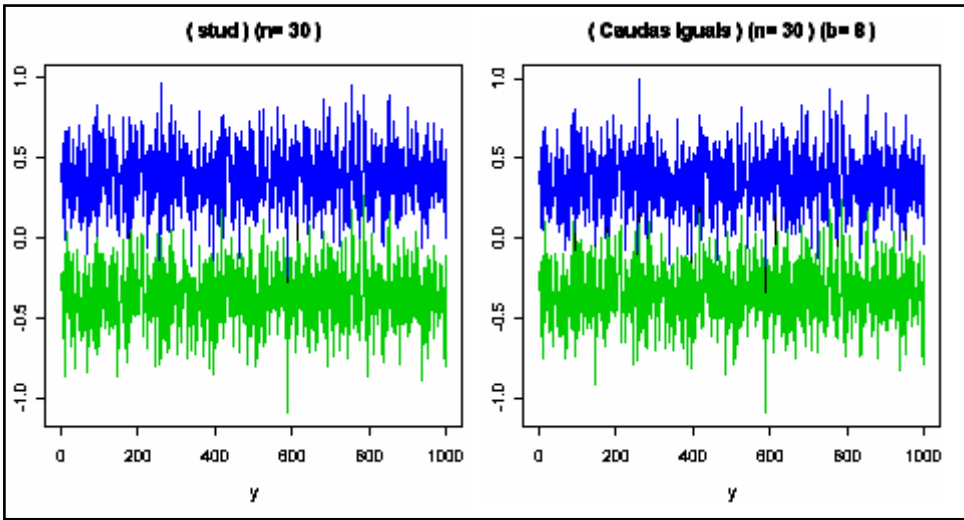


Figura 1 - Limites inferiores e superiores dos 1000 intervalos de confiança bootstrap studentized a 95% para $n=30$

Figura 2: Limites inferiores e superiores dos 1000 intervalos de confiança subamostragem de caudas iguais a 95% para $n=30$ e $b=8$

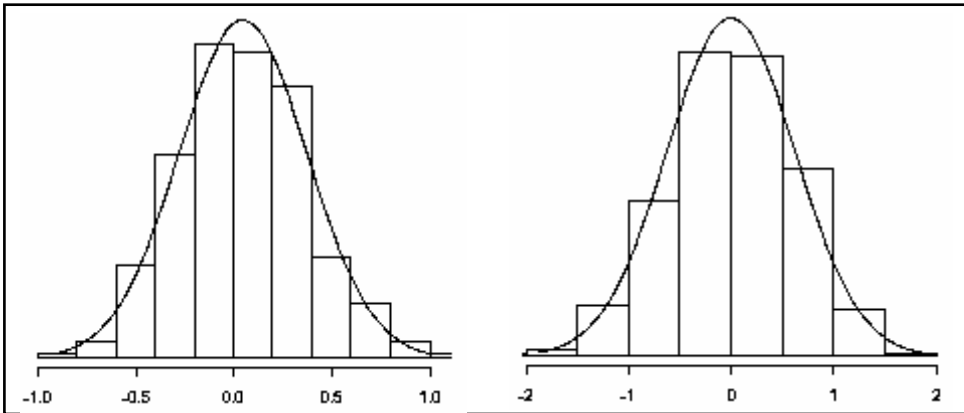


Fig. 3: Histograma das 999 estimativas do valor médio resultantes do bootstrap para $n=10$

Fig. 4: Histograma das 1000 estimativas do valor médio resultantes da subamostragem para $n=30$ e $b=4$

lidades de cobertura estimadas superiores à dos intervalos produzidos por subamostragem. Verificou-se ainda que as distribuições de probabilidade empírica dos estimadores bootstrap e subamostragem não diferem significativamente e aproximam-se da distribuição normal.

REFERÊNCIAS

- Brito, M. (2000). A metodologia bootstrap. *Actas do VIII Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de Estatística*, 15-37.
- Davison, A. C. E Hinkley, D. V. (1997). *Bootstrap Methods and their Application*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Efron, B. (1979). Bootstrap methods: Another look at the jackknife. *Annals of Statistics* 7, 1-26.
- Efron, B. (1982). *The jackknife, the bootstrap and other resampling plans*. CBMS-NSF Regional Conference Series Applied Mathem $\text{\textcircled{R}}$, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.

- Efron, B. e Tibshirani, R. J. (1986). Bootstrap methods for standart errors, confidence intervals, and other measures of statistical accuracy. *Statistical Science* **1**, 54-77.
- Efron, B. e Tibshirani, R. J. (1993). *An Introduction to the Bootstrap*. Chapman & Hall, Nova Iorque.
- Hartigan, J. (1969). Using subsample values as typical values. *Journal of the American Statistical Association* **64**, 1303-1317.
- Hartigan, J. (1975). Necessary and sufficient conditions for asymptotic joint normality of a statistic and its subsample values. *Annals of Statistics* **3**, 573-580.
- Nunes, S. (2002). *Subamostragem em Séries Temporais*, Tese de Mestrado em Matemática Aplicada, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Porto.
- Politis, D. N. e Romano, J. P. (1992). *A general theory for large sample confidence regions based on subsamples under minimal assumptions*. Technical Report 399, Department of Statistics, Stanford University.
- Politis, D. N. e Romano, J. P. (1994). Large sample confidence regions based on subsamples under minimal assumptions. *Annals of Statistics* **22**, 2031-2050.
- Politis, D. N., Romano, J. P. e Wolf, M. (1997). Subsampling for heteroskedastic time series. *Journal of Econometrics* **81**, 281-317.
- Politis, D. N., Romano, J. P. e Wolf, M. (1999). *Subsampling*. Springer-Verlag, Nova Iorque.
- Sebastião, J. R. (2001). *Testes de Vida na Família de Localização e Escala*, Tese de Mestrado em Probabilidades e Estatística, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Lisboa.
- Shao, J. e Wu, C. F. (1989). A general theory for jackknife variance estimation. *Annals of Statistics* **17**, 1176-1197.
- Tukey, J. W. (1958). Bias and confidence in not quite large samples (abstract). *Annals of Mathematical Statistics* **29**, p.614.
- Wu, C. F. (1990). On the asymptotic properties of the jackknife histogram. *Annals of Statistics* **18**, 1438-1452.

Contactos: João Renato Sebastião (jrenato@esg.ipcb.pt); Sara Morgado Nunes (sara@esg.ipcb.pt)

Escola Superior de Gestão de Idanha-a-Nova • Largo das Palmeiras • 6060 Idanha-a-Nova